סיכום

מבוא לגוף קשיח: דינמיקה

ניתן לחלק את התנועה של גוף, לתנועה קווית של מרכז המסה שלו + תנועה סיבובית של הגוף סביב מרכז המסה.

כאשר מיקום מרכז המסה של מערכת בדידה $\vec{R}_{cm}$, נקבע ביחס לראשית צירים ומוגדר להיות:

$$R_{x,cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$$

$$R_{y,cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$$

תנועה קווית למדנו בעבר, נוסיף את שלבי העבודה של התנועה הסיבובית:

<u>שלבי עבודה בדנימיקה של גוף קשיח</u>

א. רושמים כוחות על הגוף במיקומם האמיתי

ב. קובעים ציר סיבוב וקובעים כיוון סיבוב חיובי

ג. רושמים משוואות תנועה של גוף קשיח מסתובב: $\sum\tau = I\alpha$

כאשר $\boldsymbol{\tau = \pm|F||R|\ sin\ \theta}$ הוא מומנט הכח.

F הכח, R המרחק מציר הסיבוב, θ הזוית בין כיוון הכח וכיוון המרחק R של הכח מציר. הסימן פלוס או מינוס לפי הכיוון בו הכח רוצה לסובב.

כאשר $\boldsymbol{I}$ הוא מומנט ההתמד. הוא נקבע ביחס לציר סיבוב.

מספר דוגמאות לגופים רציפים: עבור דיסקה ביחס למרכזה הוא: $I = \frac{1}{2}MR^2$, עבור כדור ביחס למרכזו: $I = \frac{2}{5}MR^2$, עבור מוט ביחס לציר במרכז: $I = \frac{1}{12}ML^2$ כאשר L הוא אורך המוט.

עבור גופים בדידים: נקבל $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$, כלומר נקבע ציר ונסכום את מכפלת המסה כפול המרחק בריבוע מהציר, עבור כל אחד מהגופים.

משפט שטיינר מקשר בין מומנט ההתמד סביב ציר במרכז המסה למומנט ההתמד סביב ציר אחר במרחק r ממרכז המסה: $I = I_{cm} + mr^2$.

כאשר $\boldsymbol{\alpha}$ התאוצה הזוויתית.

ד. קינמטיקה של סיבוב. נחשב את הגדלים הנדרשים כמו מהירות זוויתית, משיקית, תאוצה משיקית, זמן מחזור, תדירות.

כאשר מתקיימים הקשרים:

$$a_T = \alpha\, R$$
$$v_T = \omega\, R$$

כאשר עבור תאוצה זוויתית $\boldsymbol{\alpha}$ קבועה נקבל:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

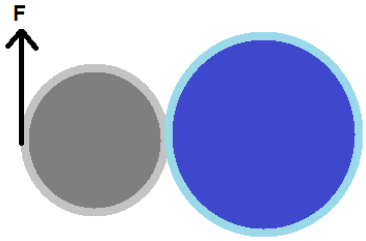
כאשר אין תאוצה זוויתית ניתן לדבר על זמן מחזור ותדירות:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

שאלות לדוגמא

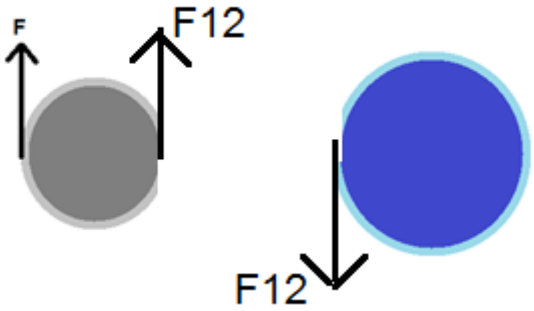
משוואת הדנימיקה של גוף קשיח

שתי דיסקיות נוגעות אחת בשניה, כאשר האחת מסתובבת השנייה גם מסתובבת ללא החלקה.
הרדיוס של דסקית אחת כפול מרדיוס הדיסקית השנייה והמסות שלהן זהות. נתון שמסתן m רדיוס הדיסקית הקטנה R.
הדיסקיות מתחילות במנוחה. מפעילים כח קבוע F בקצה הדיסקית הקטנה והדיסקיות מתחילות להסתובב.
מה המהירות הזוויתית של הדסקה הקטנה לאחר זמן t?



<u>פתרון:</u>

א. נצייר כוחות:



ב. נקבע ציר סיבוב על הדסקות להיות במרכזן וסיבוב חיוסי כסיבוב נגד כיוון השעון.

ג. משוואות מומנט הכח על הדיסקה הקטנה:

$$-FR + F_{12}R = I_1\alpha_1$$
$$F_{12}2R = I_2\alpha_2$$

מומנט ההתמד של דסקות נתון על-ידי: $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$, $I_2 = \frac{1}{2}m(2R)^2$ מכאן: $I_1 = I_2/4$

כיוון שהתאוצה המשיקית זהה בנקודת והפוכה בכיוונה ההשקה מתקיים $a_{T1} = -a_{T2}$

$$\alpha_1 R = -\alpha_2(2R)$$

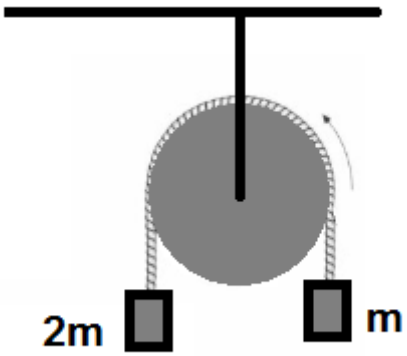
היחס בין התאוצות הזוויתיות: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{2R}{R} = -2$

נציב במשוואות התנועה ונקבל:

$$I_1\alpha_1 = -FR + F_{12}R = -FR + \frac{I_2\alpha_2}{2} = -FR - \frac{I_2\alpha_1}{4} = -FR - I_1\alpha_1$$
$$\frac{d\omega_1}{dt} = \alpha_1 = -\frac{FR}{2I_1} = -\frac{F}{mR} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = -\frac{F}{mR}t$$

משוואת התנועה של תנועה קווית ושל גוף קשיח

חוט מונח על גלגלת המקובעת בצירה, בקצה כל חוט מחוברת משקולת, כמתואר בתרשים.
מסת משקולת אחת הוא m והשנייה $2m$. מומנט האינרציה של הגלגלת הוא I ורדיוסה R.
החוט מסובב את הגלגלת ללא החלקה.
מצא את המתיחויות בחוטים.



<u>פתרון:</u>
כיוון שהחוט מחובר לגלגלת (מסתובב ביחד איתה) אין טעם לדבר על חוט אחד וניתן לחשוב על הבעיה כמורכבת משני חוטים בעלי מתיחויות שונות
משוואות תנועה:

$$2mg - T_2 = 2ma$$
$$T_1 - mg = ma$$
$$T_2R - T_1R = I\alpha = \frac{Ia}{R}$$

יש כאן שלושה משוואות עם שלוש נעלמים: T_1, T_2 ו-a.
שפתרונם:

$$T_1 = mg + ma$$
$$T_2 = 2mg - 2ma$$

נציב במשוואה השלישית:

$$2mg - 2ma - mg - ma = \frac{I}{R^2}a$$
$$a = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + 3m}$$

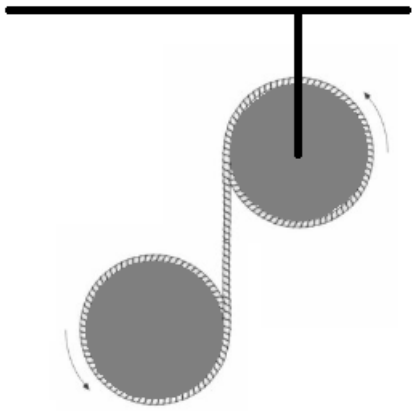
נציב בחזרה בשתי המשוואות הראשונות ונקבל:

$$T_1 = mg\left(1 + \frac{1}{\frac{I}{mR^2} + 3}\right)$$
$$T_2 = 2mg\left(1 - \frac{1}{\frac{I}{mR^2} + 3}\right)$$

תנועה סיבובית וקווית של גוף קשיח (העשרה)

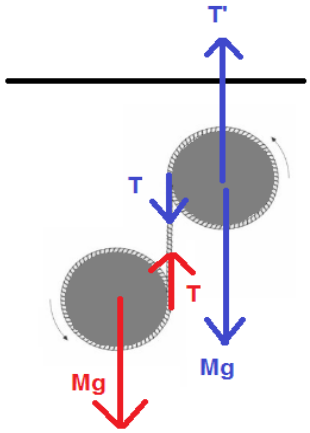
משוואות תנועה של תנועה סיבובית

המערכת בציור מכילה חוטים על דיסקות במסה m ורדיוס R. החוטים מסובבים את הדיסקות ללא החלקה. איזה מרחק תעבור הדיסקית התחתונה לאחר שנייה אחת? החוט מתוח וחסר מסה.



<u>פתרון:</u>

נרשום כוחות:



משוואות תנועה:

$$mg - T = m(a_1 + a_2)$$

$$TR = I\alpha = \frac{Ia_1}{R}$$

$$TR = I\alpha = \frac{Ia_2}{R}$$

שפתרונם:

$$a = a_1 + a_2 = \frac{mg}{m + I/2R^2}$$

אחרי <u>שנייה אחת</u> המרחק, המהירות של הדסיקית התחתונה והמהירות הזוויתית של שנהם הם:

$$H = \frac{1}{2}at^2 = \frac{a}{2} \qquad v = at = a \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{a_1 t}{R} = \frac{at}{2R} = \frac{a}{2R}$$

מתי התאוצה גדולה יותר? אם הגלגלת עושיה מדיסקה, מחישוק או כדור?

בהצלחה יותם